1 Introduction

トロピカル幾何は，代数幾何，微分幾何の類似や，数論、物理、統計、計算機等様々な幅の広い応用のある分野である．筆者は代数，幾何，及びそれらの計算 (計算機による計算) をうまく繋げて生まれるものに興味がある．トロピカルはこれらのよい架け橋になることを期待し、勉強し始めた。この文章ではトロピカル幾何の入門として筆者が興味を持った代数的性質、特に非アルキメデス的な性質についてまとる．トロピカル幾何はまだ入門したばかりなので、今後も学び次第を反映していくつもりである．

2 Algebraic Aspect

トロピカル演算，及びその代数的性質について述べる．

Definition 2.1. トロピカル半環とは、$\mathbb{R}$ に 以下の構造をいれたものである。

$$a + b := \max\{a, b\},$$
$$a \cdot b := a + b$$

これにより、加法と乗法が定義できた. 加法と乗法が定義できたので，それらの基本的な性質について確認する．

Lemma 2.2. トロピカル半環では, 以下が成り立つ.

- 乗法について *associative* である. つまり，任意のの $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対し，$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ となる. 加法についても同様.
- *distributive* である. $a(b + c) = ab + ac$
- 0 は乗法的な単位元である．

$-\infty$ を $\mathbb{R}$ に加えることで, 加法的単位元を追加して考えられる. また，$a, b \in \mathbb{R}$ に対し，$\max\{a, b\} \in \mathbb{R}$ となるので，これらの逆元は存在しない．

Remark. トロピカル半環は -1 倍するこで *min* で考えることもできる零元を ∞ として扱う場合はこちらで考えることが多い.

2.1 dequantization

トロピカル半環が通常の $\mathbb{R}$ の演算の「脱量子化」として見れる．(Maslov の脱量子化). 具体的には, 任意の $h > 0, s, y \in \mathbb{R}$ に対し,

$$x +_h y := h \log(e^{\frac{x}{h}} + e^{\frac{y}{h}})$$
$$x \times_h y := h \log(e^{\frac{x}{h}} \cdot e^{\frac{y}{h}})$$

と定める．乗法は定義から明らかに h に依存せず, 加法だけが h に依存する．

Lemma 2.3. $h > 0$ のとき，$(\mathbb{R}, +_h, \times_h)$ は $(\mathbb{R} > 0, +, \cdot\ )$ と半環として同型である．

Proof. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0}$ を $f(x)=(e^{\frac{1}{h}x})$ で定める. $t=e^{\frac{1}{h}}$ とすると $f(x)=t^x$ とかける. こうして計算してみると,$f(x+_h y)=f(x)+f(y)$ がわかり，$f(xy)=f(x)f(y)$ もわかる. 指数関数なので, 全単射は明らかにわかる. これより，同型が言えた. □

また，$m=\max\{x,y\}$ とおくと，

$$h\log(e^{\frac{m}{h}})\le x+_h y\le h\log(2e^{\frac{m}{h}})$$

となり，

$$m\le x+_h y\le m+h\log 2$$

が成り立つ．よって,$h\to+0$ の極限をとると，$x+_h y=\max\{\mathrm{x},\mathrm{y}\}=$“$x+y$” が成立するため, 極限がトロピカル半環になる.

2.2 Tropical Polynomial

Definition 2.4. トロピカル単項式 $ax_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}$ とは $j_1x_1+\cdots+j_nx_n+c$ とかける式のことである. トロピカル多項式 $F=\sum c_jx^j$ とは $\max\{c_j+j\cdot x\}$ で定められる式である.

F は $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を定める.

Remark. ここまででトロピカル幾何の基本的な定義を触れてきたが、トロピカル幾何には以下の問題意識や応用は具体的に以下の *4* 種類がある *(*と書かれていた。*)*

(1) 扇 *(fan)* の退化
(2) 曲線の数え上げ
(3) 複素構造の極限
(4) 実代数曲線, アメーバの研究

とはいえ，私の興味は p-進への応用のため, 代数曲線やアメーバについて調べる.

3 Non-Archimedian Tropical Algebraic Geometry

トロピカル幾何は代数幾何と類似的の考察される. 代数幾何では多項式の零点集合を図形として捉える. トロピカルの世界でも同様にみるためにまず多項式環に対して、どう零点を定義するかをみる。その後これが非アルキメデスアメーバと一致することをみる.

Definition 3.1 (Tropical hypersurfaces)**.** d 変数トロピカル多項式の零点集合 $T(f)$ を以下で定める.

$$T(f)=\{\omega\in\mathbb{R}^d\mid f(\omega)\text{ が}\omega\text{で微分できない }\}$$

これをトロピカル超曲面という.

これが零点集合らしいこと、代数多様体らしいことを示す. 今回は特に非アルキメデスの場合だけ考える. 以降では，K を完全体とし，$\overline{K}$ を K の代数閉包，$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ を絶対ガロア群とする.

Definition 3.2. V がアフィン代数多様体とは以下を満たすことである.

(1) $V\subset\overline{K}^n$

(2) $\overline{K}[X_1,\ldots,X_n]$ のある素イデアル $\mathfrak{p}$ が存在し, $V = \{(x_1,\ldots,x_n)\} \subset K^n \mid$ 任意の $f \in \mathfrak{p}$ に対し $f(x_1,\ldots,x_n) = 0)$

Definition 3.3. V が K 上定義されているとは，$\mathfrak{p}$ の生成元 $f_1,\ldots,f_n$ として，K 係数の多項式がとれること. また，K 有理点 $V(K)$ を $V \cap K^n$ で定める．

一般にイデアル I に対し，$V_I := \{(x_1,\ldots,x_n) \subset \overline{K}^n |$ 任意の $f \in I$ に対し $f(x_1,\ldots,x_n) = 0\ \}$ と定める．また，$V \subset \overline{K}^n$ に対し，$I_V := \{f \in \overline{K}[X_1,\ldots,X_n] \mid$ 任意の V の元 $(x_1.\ldots,x_n)$ に対し $f(x_1,\ldots,x_n) = 0\}$ とする. これらは $I_{V_I} = \sqrt{I}$ となる．また、代数多様体として $\mathfrak{p} = (f)$ を取るとき、超曲面といい.X_f と書く

Definition 3.4. $v : K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が以下を満たすとき非アルキメデス付値という.

- $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$
- $v(xy) = v(x) + v(y)$
- $v(x + y) \geq \min v(x), v(y)$

Remark. このとき $p > 1$ とし,$d(x,y) = p^{-v(x-y)}$ とすると, 距離の公理を満たす.

以降 K には非アルキメデス付値が定義され、その誘導する距離位相について完備とする.

Theorem 3.5. 完備付値体 K の付値を v_K とする. 有限次代数拡大 L に対し付値は v_L に一意に延長でき、以下となる.

$$v_L(x) = \frac{1}{[L:K]} v_K(N_{L/K}(x))$$

また、これから $\overline{K}$ にも付値が延長できることがわかる.

Definition 3.6. X_f を $\overline{K}$ 上の超曲面とする. このとき $\mathcal{A}_f := \overline{v(X_f(\overline{K}))}$ とする. これを非アルキメデス的アメーバという.

Remark. おそらくアメーバは超曲面に限らず一般的な代数多様体で定義できる.

Theorem 3.7. $0 \neq f \in K[X_1,\ldots,X_d]$ が定める超曲面 X_f に対し,X_f の定める非アルキメデス的アメーバ $\mathcal{A}_f$ とトロピカル超曲面 $T(f^t)$ は一致する. *(付値は非自明の仮定が必要?)*

一つずつ補題を用意して示す多項式 f に対し、そのトロピカル化を f^t を以下で定める

$$f^t(u) := \min\{v(a_n) + u \cdot n\}$$

で定める. 零点集合の定義は変わらない.

Lemma 3.8. $T(f^t)$ は *closed.*

Proof. $S = \cup(f^t - (a_{u_1}u_1x))^-1(0) \cap f^t - (a_{u_2}u_2x))^-1(0))$ となる. $\mathbb{R}$ はハウスドルフなので、1 点の逆像は閉. f^t は連続で、有限和について閉じるので、S は閉集合. □

Lemma 3.9. $\mathcal{A}_f \subset T(f^t)$

Proof. $T(f^t)$ は closed なので、$v(X_f(\overline{K})) \subset T(f^t)$ を示せばよい. $u = (u_1,\cdots,u_d) \in v(X_f(\overline{K}))$ とすると、定義から $v(z_i) = u_i$ となる $z_i \in \overline{K}$ が取れ、$f(z_1,\cdots,z_d) = 0$ となる. u が零点集合でない、つまり,$\#\{u \mid v(a_u z^u) = \min\{v(a_u z^u)\}\} = 1$ とすると,$v(f) = \min\{v(a_u z^u)\} \neq \infty$ となるので、矛盾する. よって $u \in S$ となる. □

$\Gamma := v(\overline{K}^{\times})$ とする.

Lemma 3.10. v が非自明な付値, つまり、$\#\Gamma > 1$ のとき,Γ は $\mathbb{R}$ 上稠密.

Proof. v が非自明なので、$v(a) \neq 1$ となる $a \in \overline{K}^{\times}$ が存在する. $\overline{K}$ は代数閉体なので、$a^{1/n}, a^m \in \overline{K}$ として、取れ、$\frac{m}{n}v(a) \in \Gamma$ となる. となる $\mathbb{Q}$ が $\mathbb{R}$ 上稠密なので, 言えた. □

Remark. 同様にして $T(f^t) \cap \Gamma^d$ は S 上稠密.

これより,$T(f^t) \cap \Gamma^d \subset \mathcal{A}_f$ を示せば良い.

Lemma 3.11. $T(f^t) \cap \Gamma^d \subset \mathcal{A}_f, 0 \in T(f^t) \Leftrightarrow 0 \in v(X_g(\overline{K}))$ に対し $0 \in T(g^t)$

Proof. $u = (u_1, \cdots, u_d) \in T(f^t) \cap \Gamma^d$ に対し，$v(a_i) = u_i$ となる a_i が存在する. $g(X_1, \cdots, X_d) := f(a_1X_1, \cdots, a_dX_d)$ とすると,$g^t(0, \cdots 0) = f^t(u_1, \cdots, u_d)$ となるので，$u \in X_f \cap \Gamma^d \Leftrightarrow 0 \in X_g$ となる. また，$u \in \mathcal{A}_f \Leftrightarrow (1, \cdots, 1) \in V_g(\overline{K}) \Leftrightarrow 0 \in v(V_g(\overline{K}))$ となる. □

Lemma 3.12. $0 \in T(f^t)$ に対し,$0 \in \mathcal{A}_f$

Proof. $0 \in T(f)$ より,$f^t(0) = v(a_{u_1}) = v(a_{u_2})$ となる u_1, u_2 が存在する. 今 $(u_1 - u_2) \cdot b \neq$ となる $b \in \mathbb{Z}^d$ に対し,$f_b(t) := f(t^{b_1}, \cdots t^{b_d})$ とする. この時 $f_b(t)$ の Newton Polygon には,$(u \cdot b, v(a_u)), (v \cdot b, v(a_v))$ が存在し，一直線で結ばれる. この時,Newton Polygon の性質から,$f_b(\alpha) = 0$ かつ $v(\alpha) = 0$ となるものが存在する. よって $v(\alpha^{1/b_1}, \cdots, \alpha^{1/b_d}) = 0$ となり,V に属することが言える. □

Definition 3.13. $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n$ に対し, $\{(0, v(a_0)), (1, v(a_1)), \cdots, (n, v(a_n))\}$ を取る. これ全ての点が線の上部に位置するように点を結んで，下に凸となるように作った折れ線を $f(x)$ の *Newton Polygon* という.

Lemma 3.14. $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n(a_0a_n \neq 0)$ を体 K 上の多項式とする. 今 $(u, f(f)), (v, f(v))$ が *Newton Polygon* の傾き $-m$ の線分とすると，$f(x)$ は $v - u$ 個の解 α_1, α_{v-u} であって付値が $v(\alpha_1) = \cdots = v(\alpha_{v-u}) = m$ であるものが存在する.

Proof. Neukirch II 章命題 6.3 参考. □

References

[1] MANFRED EINSIEDLER, MIKHAIL KAPRANOV, AND DOUGLAS LIND. NON-ARCHIMEDEAN AMOEBAS AND TROPICAL VARIETIES,2005

[2] Neukirch, Algebraic Number Theory