1 Introduction

反復積分の幾何学 1 章を概説し, 多重ゼータの間に関係式があることを示す.

2 1 次微分形式の反復積分

領域 $D \subset \mathbb{R}^n$ で定義された 1 次微分形式に対して反復積分の定義を与える. 反復積分の前に D のなめらかな曲線 $\gamma : [0,1] \to D$ 上の線積分を定義する. 反復積分はこれを繰り返したものである.ω は D 上の一次微分形式とする。つまり、ある D 上の C^∞ 級関数 $a_i(x_1, \ldots, x_n)$ を用い,

$$\omega = \sum a_i(x_1, \ldots, x_n) dx_i$$

と表される. この時, 線積分は

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \gamma^* \omega = \sum \int_0^1 a_i(\gamma_1(t), \cdots, \gamma_n(t)) \gamma_i'(t) dt$$

とかける。

Lemma 2.1. 一次微分形式は曲線 γ のパラメータの取り方によらない. つまり,$\phi : [0,1] \to [0,1]$ が C^∞-級であって、全単射な時, $\gamma' = \gamma \circ \phi$ とすると $\int_\gamma w = \int_{\gamma'}$ となる.

一次微分形式の反復積分を定義する.

Definition 2.2. $\omega_1, \cdots \omega_m$ を D 上の微分形式とする. なめらかな $\gamma : [0,1] \to D$ に対し,$\gamma^* \omega_i = f_i(t) dt$ とかける. このとき,γ での $\omega_1, \cdots, \omega_n$ の**反復積分**を以下で定める.

$$\int_\Delta f(t_1) \cdots f(t_n) dt_1 \ldots dt_n$$

ただし、$\Delta := \{(t_1, \cdots, t_n) \mid 0 \le t_1 \le \cdots \le t_n \le 1\}$

Lemma 2.3. 反復積分は γ のパラメータの取り方によらない.

Example 2.4. ω_0, ω_1 を以下で定める.

$$\omega_0 = \frac{dx}{x}, \omega_1 = \frac{dx}{1-x}$$

γ を原点 O から $x (0 < x < 1)$ を結ぶ線分とする. このとき ω_0, ω_1 の γ に沿った反復積分は

$$\int_\gamma \omega_1 \omega_0 = -\int_0^x \frac{\log(1-t)}{t} dt$$

となる. これは**二重対数関数**とよばれ,$Li_2(x)$ で表す. 二重対数関数はべき級数展開すると

$$Li_2(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^2}$$

となる.

反復積分の性質について述べる. $\gamma : [0,1] \to D$ に対し、$\gamma^{-1}(t) := \gamma(1-t)$ で定める. このとき,γ と γ^{-1} は以下の関係がある.

Lemma 2.5.
$$\int_{\gamma^{-1}} \omega_1 \cdots \omega_k = (-1)^k \int_\gamma \omega_1 \cdots \omega_k$$

なめらかな曲線 $\alpha, \beta : [0,1] \to D$ が $\alpha(1) = \beta(0)$ を満たすとする. . このとき, 曲線の合成 $\alpha\beta$ に対して、反復積分は以下のようになる.

Propostion 2.6.
$$\int_{\alpha\beta} \omega_1 \cdots \omega_n = \sum_{0 \le i \le k} \int_\alpha \omega_1 \cdots \omega_i \int_\beta \omega_{i+1} \cdots \omega_k$$

上の命題は反復積分から基本群の非可換な情報を習得する際に非常に役に立つ

3　多重対数関数

多重対数関数および，その一般化を定義する．そこから多重ゼータの反復積分表示を持つことと，反復積分を利用した関係式を説明する.

Definition 3.1. 多重対数関数を以下で定義する.
$$Li_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}$$

Lemma 3.2. $Li_k(z)$ は収束半径 *1* でその中で, 一様絶対収束する.

Lemma 3.3. $|z| < 1$ に対し,
$$Li_k(z) = \int_0^t \frac{Li_{k-1}(t)}{t}$$

Proof.
$$\int_0^z 1/t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^{k-1}} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z \frac{t^{n-1}}{n^{k-1}} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}$$
□

Lemma 3.4. 多重対数関数 $Li(z)$ は $D' = \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ 上一意に解析接続される. さらに，その時
$$Li(z) = \int_\gamma \omega_1 \omega_0^{k-1}$$
とかける.

Proof. $Li_2(z)$ が上を満たし, 反復積分表示が $\int_\gamma \omega_1\omega_0$ となることは認める.(自分の時間不足で記載していないところに証明をのせます.) 積分表示から $Li_2(0) = 0$ となるので、$\frac{Li_2(z)}{z}$ も D' 上正則. ここから
$$\int_\gamma \omega_1 \omega_0^2 = \int_0^1 \frac{Li_2(z)}{z} = Li_3(z)$$
とかけ、この正則性も従う. 以降は帰納的に示される. □

多重対数関数は次のように一般化できる.

$$L(k_1,\cdots,k_n;z)=\sum_{o<m_1<\cdots<m_n}\frac{z^{m_n}}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}}$$

これは,$n-1$ までの次数が m_n に制限されるので, 一変数の場合と同様にでき, 収束半径は 1 であり,$k_n>1$ なら $z=1$ で収束する.

Remark. $L(k,z)=Li_k(z)$

多重対数関数は微分に対して以下の関係がある. $k_n>1$ の時,

$$\frac{d}{dz}L(k_1,\cdots,k_n)=\sum_{0<m_1<\cdots<m_n}\frac{z^{m_n}}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}}\frac{z}{m_n}=\frac{1}{z}\sum\frac{z^{m_n}}{m_1^{k_1}\cdots m_{n-1}^{k_{n-1}}m_n^{k_n-1}}=\frac{1}{z}L(k_1,\cdots,k_{n-1},k_n-1;z)$$

$k_n=1$ の時,

$$\frac{d}{dz}L(k_1,\cdots,k_n)=\sum\frac{z^{m_n-1}}{m_1^{k_1}\cdots m_{n-1}^{k_{n-1}}}=\sum\frac{z^{m_{n-1}}}{m_1^{k_1}\cdots m_{n-1}^{k_{n-1}}}\sum\frac{z^{m_n-1}}{z^{m_n}-1}=\frac{1}{1-z}L(k_1,\cdots,k_{n-1};z)$$

Remark. 上の場合は k_n の値 $k_n-1\neq k_{n-1}$ に代わるだけである. 下の場合は,n 変数多重対数関数から $n-1$ 変数多重対数関数に代わる.

これより,

$$L(k_1,\cdots,k_n;z)=\int_0^t\omega_1\omega_0^{k_1-1}\cdots\omega_1\omega_0^{k_n-1}$$

となる.

Definition 3.5. $L(k_1,\cdots,k_n;1)$ を多重ゼータ値といい,$\zeta(k_1,\cdots,k_n)$ とかく.

多重ゼータ値の間には反復積分を使うことで関係式が作られる.

$$I(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_k):=\int\omega_{\epsilon_1}\cdots\omega_{\epsilon_k}$$

とおく (ϵ_i は 0 か 1 のみを取る.)

Lemma 3.6. $I(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_k)=I(1-\epsilon_1,\cdots,1-\epsilon_k)$ となる.

Proof. 変数変換すれば得られる. □

これを用いると例えば,$I(1,0,0)=I(1,1,0)$ と一致すす jjj ることがわかる. ゼータ側でかくと

$$\zeta(1,2)=\zeta(3)$$

となり確かに関係式が得られていることがわかる. 一般の場合に上の関係式を多重ゼータ値に置き換えたものをの**多重ゼータの双対関係式**と呼ばれる. こうした多重ゼータどうしの関係があることにより, 多重ゼータ値が作る $\mathbb{Q}$ ベクトル空間には規則性があることが推測される. 実際、以下が予想されている. $\mathbf{k}=(k_1,\cdots,k_r)$ が $r=0$ か $k_r>1$ を満たすとき admissible といい,

$$\mathcal{Z}_k:=\sum_{\mathbf{k}:admissible\text{ かつ }\sum k_i=k}\mathbb{Q}\zeta(\mathbf{k})$$

と定める.

Conjecture 3.7. d_k を $\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}_k$ とすると、以下が成り立つ.

$$d_0=1,d_1=0,d_2=1//d_k=d_{k-2}+d_{k-3}(k\geq 3) \tag{1}$$