1　Introduction

【第 21 回 数学カフェ】蔵本モデルと一般化スペクトル理論に向け, 関数解析の復習をした．私の担当は黒田先生の関数解析の 9 章である. これは 9 章の内容を自分なりにまとめ直したものである. せっかくの機会に関数解析を勉強し直したいと思っているので, 時間があれば，他の章についても記載する.

ここでは断らない限り $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間について考える.

2　レゾルベントスペクトル

2.1　Introduction

今回のメインターゲットはスペクトルとレゾルベントであるが, その前に線形作用素と蔵本予想の関係をについて説明しておく. 蔵本予想

Theorem 2.1. $N \to \infty$ とし，自然振動数 $\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ はある確率密度関数 $g(\omega)$ に従って独立に分布しているとする．もし $g(\omega)$ が偶関数かつ単峰型ならば，秩序変数 $r = |\eta|$ の分岐図は以下のように与えらる.K が $K_c := 2/(\pi g(0))$ よりも小さいときは $r = 0$(非同期状態) が漸近安定である．$K = K_c$ において相転移 (分岐) が起き，$K > K_c$ のときは r が正の定数となるような漸近安定な同期解が存在する．分岐点の近傍では r の大きさは $r \sim O(\sqrt{K - Kc})$ で与えられる．

我々は蔵本予想を理解することを目標にしているが，主張をみればわかるように微分方程式の漸近挙動を知ることを目指している. ただ, 前までの線形作用素の一般論はその目標とどうつながっているかが見えにくいため, 今どのステップにいるかを解説する.

- 線形常微分方程式 行列で解析可能
- ある種の微分方程式 線形作用素の半群で解析可能
- 蔵本モデル 一般化された半群で解析可能

線形作用素の半群を知るためには，線形作用素の一般論及び，スペクトルが必要という関係にある. スペクトルは行列の固有値に相当するため，非常に自然な一般化である. 一般化された半群の場合は，超関数の一般化で使わられるゲルファンドの三組を用い, スペクトルを一般化する. これは解析接続を超関数の理論を用いて，定義できたことに相当する (らしい). これを用いることで蔵本予想に対しても十分解析できる一般論を構築できたことが千葉先生の業績であるようだ. そこで, 今回は線形常微分方程式の解説を最初にいれる. また，スペクトルもただ定義するだけでは面白くないので, 具体例とその具体例を理解するのに必要なフーリヘ変換とソボレフ空間の一般論も解説する.

2.2　微分方程式と固有値

スペクトルについて説明する前に, 微分方程式において固有値がどのように現れるかを概観する. 例えば定数係数線形常微分方程式を考える.

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots a_{n-1} y^{(1)} + a_n y = 0$$

を考える. この場合

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

の固有方程式を考えることで微分方程式を解くことができる．簡単のため，固有多項式が実数上で一次式の積に分解できたとする. この時その解を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とすると, 常微分方程式の根は

$$\sum c_i e^{\lambda_i x}$$

で与えられる. この例を見るとわかるように線形常微分方程式は行列の固有値でその挙動を完全に決定することが出来る. これは線形作用素の半群の理論で統一的に解釈される. 半群を調べるには行列の固有値に相当するスペクトルを用いる. この章では，前章までの Hahn-Banach 等の関数解析の一般論を使い，スペクトルの定義及び, 具体的な対象に対するスペクトルの計算を行う.

2.3 Neumann 級数

この章でも前章までと変わらず,$\mathcal{X}$ を $\{0\}$ でない Banach 空間とする. $B(\mathcal{X})$ は Banach 空間となる.

Theorem 2.2. $T \in B(\mathcal{X})$ で $\|T\| < 1$ とする. この時,$I - T$ が全単射かつ,$(I - T)^{-1} \in B(\mathcal{X})$ であり,

$$(1 - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k,$$
$$\|(1 - T)^{-1}\| \leq (1 - \|T\|)^{-1}$$

また, 一つ目の式の右辺は $B\mathcal{X}$ の元として絶対収束する.

Proof. 右辺の絶対収束は $\|T\| < 1$ より $\|\sum T^n\| \leq \sum \|T^n\| < \infty$ より明らか. また，二つ目の式は三角不等式の計算からすぐいえる．よって $\sum T^n \cdot (1 - T) = 1$ を示せばよい．$1 - T$ は連続となるので,$(1 - T) \cdot \sum_{k=0}^{m} T^n = 1 - T^{m+1} \to (1 - T) \sum_{k=0}^{\infty} T^k$ であり, 1 となる. □

Theorem 2.3. $\mathcal{X}$ を *Banach* 空間,$T \in B(\mathcal{X}), z \in \mathbb{C}$ とする．$|z| > \|T\|$ ならば,$zI - T$ は全単射であり,$(zI - T)^{-1} \in B(\mathcal{X})$ であり.

$$(zI - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1} T^k,$$
$$\|(zI - T)^{-1}\| \leq |z|^{-1}(1 - |z|^{-1}\|T\|)^{-1}$$

が成り立つ.

$\|z^{-1}T\| < 1$ に上の定理を適用すればよい. $T \in B(\mathcal{X})$ に対しては完全にわかったが，T が有界でない線形作用素の場合も $(zI - T)^{-1}$ が有界線形作用素となることは多い．こういう場合はそれを使って調べる.

2.4 レゾルベント・スペクトル

レゾルベントとスペクトルを定義する. レゾルベントは正則な関数, スペクトルはその逆の存在である. レゾルベントは正則で通常の複素解析的なことができる. 例えば線形作用素同士の合成は一般に非可換であるが，レゾルベント同士は複素の元のように交換可能である．これは非可換を生み出す要因が T しかなく，T 同士の積は可換であるためである. そのため T を取り替える操作をする場合は非可換になることが推測される. また，複素解析同様に正則な関数として扱うことができる. レゾルベントとスペクトルを定義した後はレゾルベントの一般論について調べる.

Remark. レゾルベントは非常に簡単である一方, 私はスペクトルをどう解釈するべきかよくわからない．ただの固有値みたいなものでもあるが微分方程式を解く時に固有値が出てきた場合にどう解けばよいかは全く理解できておらず, 気になるところである．蔵本予想の解説である程度説明はあったはずだが, 何も理解していないことがわかった.

Lemma 2.4. $(zI - T)^{-1} \in B(\mathcal{X})$ とする. このとき T は閉作用素となる.

Proof. $(zI - T)^{-1} \in B(\mathcal{X})$ より, 閉作用素である。その逆写像もまた、閉作用素である。また、定数倍写像は有界線形写像なので、その和もまた閉作用素となる。 □

Definition 2.5. T を *Banach* 空間 $\mathcal{X}$ とする.

- 以下を**レゾルベント集合**という

$$\rho(T) := \{z \in \mathbb{C} \mid T - z : D(T) \to V \text{ が全単射 }\}$$

  このとき,$(T - z)^{-1}$ を**レゾルベント**といい,$R(z; T)$ で表す.
- $\sigma(T) := C \setminus \rho(T)$ を T のスペクトルという.
- $T - z$ が一対一でない時 z は T の固有値という。固有値全体の集合を**点スペクトル**といい，$\sigma_p(T)$ と書く.
- $\{z \in \mathbb{C} \mid T - z : D(T) \to V$ が単射だが, 全射ではなく, 像が稠密 $\}$ を $\sigma_c(T)$ 書き，この元を連続スペクトルという. 蔵本モデルでは連続スペクトルを扱う.
- $\sigma(T) \setminus (\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T))$ の元を剰余スペクトルという.

Theorem 2.6. $z_1, z_2 \in \rho(T)$ ならば, いかが成り立つ.

$$\begin{aligned} R(z_2; T) - R(z_1; T) &= (z_1 - z_2)R(z_2; T)R(z_1; T) \\ &= (z_1 - z_2)R(z_1; T)R(z_2; T) \end{aligned}$$

これを第一レゾルベント方程式という.

Remark. これは $R(z_2; T), R(z_1; T)$ が可換であることを示している. また, レゾルベントではなく，ただの複素関数だと思うと $\frac{1}{z_2 - X} - \frac{1}{z_1 - X}$ を計算しているだけなので自然に成り立つことを期待する.

Proof. $R(z_2; T) = R(z_2; T)(z_1 - T)R(z_1; T)$,$R(z_1; T) = R(z_2; T)(z_2 - T)R(z_1; T)$ となる.

$$\begin{aligned} R(z_2; T) - R(z_1; T) &= R(z_2; T)(z_1 - T - z_2 + T)R(z_1; T) \qquad R(z_2; T), R(z_1; T) \text{ の線形性} && (1) \\ &= (z_1 - z_2)R(z_2; T)R(z_1; T) && (2) \\ & && (3) \end{aligned}$$

逆も同様にすることで言える. □

Theorem 2.7. $z_0 \in \rho(T)$ なら

$$\{z \mid |z - z_0| < \|R(z_0; T)\|^{-1}\} \subset \rho(T)\}$$

であり, この円板の中で

$$R(z; T) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z - z_0)^k R(z_0; T)^{k+1}$$

となる.

Proof. $B' = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z - z_0)^k R(z_0; T)^{k+1}$ が収束することを示し, その中で $(T - z)B' = id$ を示せばよい. それが成り立つと,$T - z$ が像への全単射であることがわかり, 逆写像は一意なので, 上の定理は示される. $B := 1 + (z - z_0)R(z_0; T) \in B(\mathcal{X})$ とすると, $B(z_0 - T) = z_0 - T + z - z_0 = z - T$ となる. これは $D(T)$ 上で定義されている. 仮定より,$\|(z - z_0)R(z_0; T) < 1\|$ より, 前の定理を適用することで,B は全単射かつ

$$B^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z - z_0)^k R(z_0; T)^k$$

となる. また,$z - T = B^{-1}(z_0 - T)$ となる. よって $B(z - T) = z_0 - T$ となり $R(z; T)B^{-1}$ を B' とすれば $(z - T)B' = id$ となるのでがレゾルベントであることがわかり, 全単射であることが言えた. □

Theorem 2.8. $R(z; T)$ は $\rho(T)$ で正則であり,

$$\frac{d}{dz} R(z; T) = -R(z; T)^2$$

Theorem 2.9. $T \in B(\mathcal{X})$ なら $\rho(T)$ は空ではない.

Definition 2.10. $\Lambda \subset \mathbb{C}$ を空でない開集合とする. $R : \Lambda \subset \mathbb{C} \to B(\mathcal{X})$ で,

$$R(z_2) - R(z_1) = (z_1 - z_2)R(z_2)R(z_1)$$

を満たすとき,R を擬レゾルベントという.

Theorem 2.11. 以下が成り立つ.

(1) $R(z)$ の値域は z のとり方によらない. これを R と書く.

(2) $\{u \in \mathcal{X} \mid R(z)u = 0\}$ は z によらない. これを N とする.

(3) もし $N = \{0\}$ であれば, $R(z)$ は R を定義域とする, ある *closed operatorT* のレゾルベントになる.

2.5 実例

Example 2.12. $\mathcal{X} = \ell^p (1 \geq p < \infty)$ とし,

$$T(u_1, \cdots) = (u_2, \cdots)$$

とする. この時 $\sigma(T), \sigma_p(T)$ は計算すると, 以下のようになる. $\sigma(T) = \{z \mid \|z\| \geq 1\}, \sigma_p(T) = \{z \mid \|z\| < 1\}$

References

[1] 関数解析, 黒田成俊