第 1 章

Introduction

周期とは適当な関数を適切な範囲で積分したものである. 適当なの意味はものによって変わりうる. ここでは Contesvich-Zagier 予想や数論で出てくる周期に関する話ができればと思う. 自分の興味としては

- 計算との関連.
  - 計算可能実数や実閉体のモデル理論との関連.
  - 数論的な対象が計算可能とは, どういう意味か?
- 数論幾何的な対象の深い理解
  - ドラムの定理との関連
  - モチーフ, 数論的基本群との関連

このノートは周期について自分が話したことを中心にまとめ直すものとする.

第 2 章

リーマン面の理論

2.1 周期積分、ヤコビ多様体

実際にリーマン面の理論の後半を読み, 周期の関連を見る.

2.1.1 位相幾何からの準備

議論をする上で最低限のホモトピー論, ホモロジー論を定義する.

Definition 2.1.1. *X 上の 2 つの連続な path $f, g : [0,1] \to X$ に対し, 連続写像 $H : [0,1]\times[0,1] \to X$ で $H(0,\cdot) = f(\cdot), H(1,\cdot)$ となるものが存在するす時,f, g は***ホモトピック***という.*

Definition 2.1.2. *X と $x \in X$ に対して基点, つまり始点と終点が x となる連続な path 全体を F と表す.$\alpha, \beta \in F$ に対して,*

$$\alpha \cdot \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & (t \leq 1/2) \\ \beta(2t-1) & (t \geq 1/2) \end{cases}$$

*とすると, これは積構造を定める. これをホモトピーによる同値関係で割ったものを***基本群***といい $\pi(X, x)$ で表す. すぐ計算すればわかるように, 基本群上でも上で定めた積構造が well-defined であり, この演算について群になる. また, 弧状連結である等, 基点のとり方によらない場合は $\pi(X)$ と表すこともある.*

Definition 2.1.3. *$A \subset X$ に対し,$F(x,0) = x, F(x,1) \in A, F(a,1) = a$ となる写像 F を変位レトラクトという. これは,X 上の恒等写像と A へのレトラクション (A への制限が恒等写像になるもの) の間のホモトピーの存在を意味する. この時,id とレトラクトはホモトピー同値になる. ただし A に写像が制限されていないので, ホモトピー同値はホモトピックと同値になる.*

ホモロジー・コホモロジーについて定義する. 具体的な話を書きすぎると死んでしまうが,

- 特異ホモロジー
- 単体ホモロジー

- 特異コホモロジー
- Kronecker 積

について説明する.

$\Delta^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i = 1, \forall x_i \geq 0\}$ とする. $S_n(X) := \{f : \Delta^n \to X \mid f$ は連続写像 $\}$ とし, $C_n(X) := \oplus_{f \in S_n(X)} \mathbb{Z}$ とする. $i_j : \Delta_n \to \Delta_{n+1}$ を第 j 成分を 0 にし, それ以降は一つずらしとする写像とする. $d : S_n(X) \to S_{n-1}(X), \sum_j f \mapsto (-1)^j f \circ i_j$ とする. すると $d_n \circ d_{n+1} = 0$ となり,

Definition 2.1.4. $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ を X の開被覆とする. 任意の有限個の $i_1, \ldots, i_k \in I$ に対し $\cap U_i$ が可縮な時,$\mathcal{U}$ を単純被覆という. X が n 次元多様体であって,

2.1.2　ポアンカレの補題とドラムの定理

第 3 章

第一回周期セミナー@12/01

12 月 1 日に行われた周期セミナーの初回で説明である. 第一回では層の定義と層のコホモロジーについて議論した.

周期の数論的な関係を見るために, 代数的な DeRham の定理を `https://arxiv.org/pdf/1302.5834.pdf` に基づきまとめる.

ここでは層と層係数のコホモロジーを使ってドラムの定理を計算する. そこで最初に層の準備、及びスペクトル系列についての内容を記載する.

- 微分形式のなす層を定義し, それが fine であることを示す.
- パラコンパクト位相空間上の fine sheaf は acyclic
- 二重複体のコホモロジーから acyclic resolution の時のコホモロジーの同型を示す.
- コホモロジーの同型と Poincare の補題から可微分多様体と複素多様体の場合のドラムの定理を示す.
- GAGA と複素多様体の時のドラムの定理から射影代数多様体の場合にドラムの定理を示す.
- チェックコホモロジーを使って代数多様体のドラムの定理を広い範囲に拡張している.

コホモロジーの Notaiton

- $\mathcal{H}^k(A())$: 層の complex の k 次の Image/Ker
- $\mathfrak{h}^k(T(L))$: 層の complex$L$ をアーベル群の完全関手で飛ばした先のコホモロジー.
- $H^K(U, L)$: 層 L の complex の U でのセクションのコホモロジー.
- $\mathbb{H}^k(X, L)$: 二重複体 (今回は L の Godement resolution) に対する Total のコホモロジー

余力があればやりたいこと

- M の特異コホモロジーと定数層のコホモロジーの (大域切断) 一致

Theorem 3.0.1.

$$H^n(X, \Omega_{alg}) = H^n(X_{an}, \mathbb{C})$$

3.1 層の議論

ここでは層と層の間の射について定義する.

- 層の層化側の定義
- 層の貼り合わせの条件

- 環つき空間の射
- $f:(X,O_X)\to(Y,O_Y)$ から作れる層.

3.1.1　層の定義

Definition 3.1.1. 任意の開集合 $U\subset X$ に対し,$\mathcal{F}(U)$ が対応し, $v\subset U$ なら制限写像 $|_V:\mathcal{F}(U)\to\mathcal{F}(V)$ が存在し、以下を満たす時 $\mathcal{F}$ を前層という.

- $F(\emptyset)=0$
- $|_U:F(U)\to F(U)=id$
- $|_W\circ|_V=|_W$

前層 $\mathcal{F}$ が任意の開集合 U とその開被覆 $\{U_i\}$ に対し, 以下を満たす時層という.

- $s\in F(U)$ に対し,$s|_{U_i}=0$ の時,$s=0$.
- $s_i\in F(U_i)$ に対し,$s_i|_{U_{ij}}=s_j|_{U_{ij}}$ となる時,$s\in U$ で $s|_{U_i}=s_i$ となる.

Example 3.1.2. 位相空間 $\mathbb{C}$ を考え, その開集合 U に対し,

$$F(U):=\{f:U\to\mathbb{C}\mid f is\ continuous\}$$

とする.$|_U$ を定義域の制限で定める. この時 F は層になる.

Lemma 3.1.3. 前層 $\mathcal{F}$ が層であることは任意の開集合 U とその開被覆 $\mathcal{U}$ に対し,

$$0\to\mathcal{F}(U)\to\prod_{U_\alpha\in\mathcal{U}}\mathcal{F}(U_\alpha)\to\prod F(U_\alpha\cup U_\beta)$$

が *exact.*

Proof. 自明. ちゃんと証明を書く場合はまた今度. 単射性は左側の完全性張り合わせは右側の全射性に対応 □

前層 $\mathcal{F}$ に対し,

$$\mathcal{F}_x:=\varinjlim_{x\in U}\mathcal{F}(U)$$

これを前層の茎 (stalk) という.

前層の層化を定義する

Definition 3.1.4 (層化)**.** X 上の前層 $\mathcal{F}$ に対し,

$$\mathcal{G}(V)=\{(s_x)\in\coprod_{x\in V}\mathcal{G}_x\mid\forall x,\exists U_x,f\in\mathcal{F}(U_x)s.t.\ \forall y\in U_x,s_y=f_y\}$$

で定めた層 $\mathcal{G}$ を層化という.

Lemma 3.1.5. 上で定めた $\mathcal{G}$ は層になる.

Proof. 単射性を示す. 開被覆 $\{\mathcal{U}_i\}$ に対し,$s|_{U_i} = 0$ なら $s = (s_x)$ とした時にすべての s_x に対し 0 となるので $s = 0$ となる. 張り合わせは $s_i|_j = s_j|_i$ の時,$s = (s_x)$ を $x \in U_i$ に対しては $s_x = s_i|_x$ とする. この時,$x \in U_{ij}$ に対し,$s_i|_x = s_j|_x$ となるので,s は well-defined であり,$s|_{U_i} = s_i$ となる. □

Lemma 3.1.6. 自然な射 $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ とすると,$\forall x \in X$ に対し, $\mathcal{F}_x \simeq \mathcal{G}_x$ を誘導する.

Definition 3.1.7. *X の Open Base $\mathcal{B}$ に対して層の性質を満たすものを,$\mathcal{B}$-sheaf という.*

Lemma 3.1.8. *$\mathcal{B}$-shaef$\mathcal{F}$ に対し,X 上の層 $\mathcal{G}$ で $\forall U \in \mathcal{B}$ に対し,$\mathcal{F}(U) = \mathcal{G}(U)$ となるものが存在する.*

層化同様の方法で

$$\mathcal{G}(V) = \{(s_x) \in \prod \mathcal{G}_x \mid \forall x, \exists U_x, f \in \mathcal{F}(U_x) \text{s.t.}\ \forall y \in U_x, s_y = f_y\}$$

とすればこれは層になる. $\mathcal{F}(U) = \mathcal{G}(U)$ は inductive limit の universality からもわかるし, 層化の構成で作ったものとの同型を層の性質からも直接示せる. $\mathcal{F}(U)$
mathcalG(U) は $\{U_x\}$ を取ることにより, 開被覆となり, 全射性がわかる. また単射性も層の性質からわかる.

層の定義を満たす具体例を紹介する. 層の典型的な例は位相空間 X に対し,$F(U)$ を U から $\mathbb{R}$ への連続関数全体です.

Remark. 上を用いるとある開被覆 $\{U_i\}$ と U_i 上の層 $\mathcal{F}_i$ が存在し,$\mathcal{F}_i|_j = \mathcal{F}_j|_i$ ならば X 上の層 $\mathcal{F}$ で $F|_i = \mathcal{F}_i$ となるものが存在する ($\{U_i\}$ とその開部分集合は *open base* になるので) なので, スキーム同士を張り合わせる場合は上の条件を満たせば問題ない.

3.1.2 層の射

X 上の層の射の定義と射の全単射を定義する

Definition 3.1.9. $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ とは

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "|_V"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "|_V"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "f_V"] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

が可換となること

開被覆で定まる層があれば, それをもとに全体に張り合わせられる.

Definition 3.1.10. X 上の層 $f:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ に対し,Ker$f$ を

$$U\to \mathrm{Ker}(f(U))$$

で定める層とし,Imf を

$$U\to \mathrm{Im}(f(U))$$

の層化で定義する.

3.1.3　層の射が誘導する層

位相空間の間の連続写像が誘導する層 $f:X\to Y$ に対し X 上の層 $\mathcal{F}$ に対し,
層の延長

3.1.4　環つき空間と射

環つき空間
環つき空間の間の射

Definition 3.1.11. 環 R に対し, 素イデアル全体のなす集合 Spec$R$ に $D(f)$ を開基とする位相をいれる.

スキームや代数多様体が環つき空間になっていること (これは Remark)

第 4 章

1/05 発表

前回の準備をもとに代数的なドラムの定理を実際に証明する今回の話す内容は以下の通りである.

- 前回の復習 (定義と最低限の性質のみ)
- スペクトル系列の定義と性質
- 二重複体からスペクトル系列の作成方法
- スペクトル系列を用いた実、複素の場合のドラムの定理の証明
- 代数的なドラムの定理の証明. ただし、Serre の GAGA を前提にする.
- ドラムの定理の一般の代数多様体への拡張
- GAGA への理解の向上.

4.1 前回の復習

前回は層の定義と層係数コホモロジーの計算方法や性質を説明した.

- Godement Resolution の定義
- Godement Resolution のセクションを取る操作は完全関手である.
- Flabby Sheaf の定義
- $\mathbb{R}$ 上の微分加群の層が Fine Sheaf であり、特に acyclic

4.2 Spectral Sequence and double complex

Definition 4.2.1. $(E, F^pE, E_r^{p,q}, d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1})$ がスペクトル系列とは

- F^pE は *finite* な *Filtration.* すなわち, 十分小さい p^0 以下の全ての p に対し,$F^pE = E,$ 十分大きい p_1 以上の全ての p に対し,$F^pE = 0.$
- $d \circ d = 0$
- $\forall(p,q) \in \mathbb{Z}^2, \exists r_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ で $r \geq r_0$ に対し,$d_r^{p,q} = d_r^{p-r,q+r-1} = 0$ となる.
- $\mathrm{Ker} d_r^{p,q}/\mathrm{Im} d_r^{p-r,q+r-1} \simeq E_{r+1}^{p,q}$
- $E_\infty^{p,q} = F^pE^{p+q}/F^{p+1}E^{p+q}$ ただし,$E_\infty^{p,q}$ は十分大きい r に対しては $E_r^{p,q}$ が一致し、それを表す.

特殊なスペクトル系列の場合の性質について示す. - $E_\infty^{p,q}$ が単純な場合の limit - E_r term が単純な場

合の limit

必要な範囲の証明に留める.

今回は二重複体からスペクトル系列を構成するのが目標である.

二重複体には n に対し,$a+b=n$ となるものの中で $K^{a,b} \neq 0$ となる (a,b) が有限という条件を課す. これに対して $E_1^{p,q} := H^q(K^{p,q}), E^{p+q} := H^{p+q}, (Tot(K^{p+q}))$ となるスペクトル系列を構成する.

二重複体からスペクトル系列を構成する手順を説明する.

前提となる道具の定義

- 次数 1 の有限二重次数完全対
- 導来対

メインの定理: 二重次数完全対からスペクトル系列が構築できる. 応用:

- フィルター付けされた複体から次数 1 の有限二重次数完全対の構築
- 二重複体の ToT からフィルター付けししたスペクトル系列の構築

Definition 4.2.2. アーベル群 D, E に対し,$i : D \to D, j : D \to E, k : E \to D$ が与えられとする. (D, E, i, j, k) が以下を満たす時 **完全対**という.

- $\mathrm{Ker} j = \mathrm{Im} i$
- $\mathrm{Ker} k = \mathrm{Im} j$
- $\mathrm{Ker} i = \mathrm{Im} k$

Definition 4.2.3. 完全対 (D, E, i, j, k) に対し, 以下の操作で作った対を導来対という.

- $D' := \mathrm{Im} i$
- $E' := \mathrm{Ker}(j \circ k)/\mathrm{Im}(j \circ k)$
- $i' = i|_{D'}$
- $j'(a) := \overline{j(b)}(i(b) = a)$
- $k'(a + \mathrm{Im}(j \circ k)) := k(a)$

Propostion 4.2.4. 上の構成が *well-defined* であり, 完全対となる.

Proof. E', j', k' について well-defined 性を示す.

- E': $\mathrm{Ker} k = \mathrm{Im} j$ より, $j \circ k \circ j \circ k = 0$ となるので,E' は well-defined.
- j': $j(b) \in \mathrm{Ker} k$ より $j(b) \in \mathrm{Ker}(j \circ k)$ となる. さらに,$i(b) = i(b') = a$ とすると,$b - b' \in \mathrm{Ker} i = \mathrm{Im} k$ となり,$j(b - b') \in \mathrm{Im}(j \circ k)$ となるので,well-defined.
- k': $b \in \mathrm{Im}(j \circ k)$ とすると,$K \circ j = 0$ より言える.

完全性を示す. とり方から $j' \circ i' = 0, k' \circ j' = 0, i' \circ k' = 0$ はすぐわかる. $Imi' \subset Kerj'$

□

r 次導来対は上の構成を r 回繰り返したものとして定義する.

Definition 4.2.5. 二重次数つき完全対とは

実際に層係数コホモロジーについて同型を示す

4.3 The Hypercohomology of a complex of sheaves

X 上の層の complex $\mathcal{L}^\bullet$ に対し, その Godment Resolution のなす二重複体を以下で定義する.

$$K := \bigoplus_{p,q} K^{p,q} = \bigoplus_{p,q} \Gamma(X, C^p \mathcal{L}^q).$$

$\mathbb{H}(X, \mathcal{L})$ を Total Coplex の定める Cohomology とする.

今あり得るコホモロジーは様々な複体があるので, それらに対する表記を定める層の二重複体を

- 層の複体が作る, コホモロジーの層 $\mathcal{H}^p(\mathcal{L}^\bullet)$
- 層の大域切断が作る群の p 次コホモロジー $H^p(X, L^n)$
- 層の Total Complex が作る群のコホモロジー $\mathbb{H}^p(X, L) := H(\oplus_{a+b=p} C^a L^b)$
- 層の複体の大域切断が誘導する群の複体から作るコホモロジー $h^p(\Gamma(X, \mathcal{L})$

これをいくつかの条件下でどういう関係にあるかを示す.

Total Cohomology は層のコホモロジーの拡張と捉えられる.

$\mathcal{L}$ に対し,$0 \to \mathcal{L} \to 0$ という複体を考えると, $\mathbb{H}(X, \mathcal{L}) := h^k(\Gamma(X, C^\bullet F))$ となる.

目的は DeRham の定理実の場合は微分加群の層は Fine なので Acyclic になる.

ここで言いたいこと

- Godement Resolution の場合のコホモロジーの関係
- 層の複体の間の Quasi iso を与えた場合に Global Section のコホモロジーがどうなるか?
- Acyclic な層の cpx の場合の Total Cohomology どうなるか?
- DeRham の定理への応用

今この場合に二重複体の作るスペクトル系列 $E_1^{p,q}, E_2^{p,q}, E^n, F^p E_n$ について確認する. まず $K^{p,q} := \Gamma(X, C^p \mathcal{L}^q)$ となる. $E_1^{p,q} := H^k(X, \mathcal{L}^\bullet)$

$\mathbb{C}$ 上の代数多様体 (局所的には $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_m)$) の作る Affine Scheme と同型) とした時, そこから, 複素解析的な空間を作れる $X^a = \{x \in \mathbb{C}^n \mid f_j(x) = 0\}$ O^{X^a} を X^a 上の正則関数全体が作る層を $(f_1, , \ldots, , f_m)$ で割った層とする.

$\mathbb{C}$ 上の代数多様体 X から複素解析的な空間 X^a を作る操作は関手的であり, これは連接層についても拡張できる. (X 上の連接層に対して,X^{an} の連接層を対応させられる)

また射としては $\phi : X^a \to X$ が取れるので、層同士の間にも射が誘導される. $\phi^* \mathcal{F} \sim \mathcal{F}^a$ となり, $H^i(X, \mathcal{F}) \to H^i(X_h, \phi^* \mathcal{F})$ が誘導される. これは X が smooth projective の場合, 同型になる.

$\mathcal{F}$ が代数的な微分形式の層だとすると,$\mathcal{F}^a$ は解析的な微分形式の層になる.

よって, 代数的な微分形式のなす層の複体の GGodement Resolution が作る Global Section の二重複体に対する, $E_1^{p,q}$ は $H^P(X, \Omega^q_{alg})$ 解析的な方は $E_1^{p,q}$ は $H^P(X^a, \Omega^q_{an})$ となり,GAGA により一致する. (本当はスペクトル系列が誘導する射の同型も必要だが) よって, コホモロジーが一致する.

$$H^*(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{H}^*(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{C}^\bullet) \simeq \mathbb{H}^*(X_{\mathrm{an}}, \Omega^\bullet_{\mathrm{an}}) \simeq \mathbb{H}^*\left(X, \Omega^\bullet_{\mathrm{alg}}\right)$$

よって言えた.

第 5 章

20200322

今回話したいこと

- モチベーション
- 層の定義と B-sheaf の定義.
- 環つき空間と O_X-mod の層
- アフィンスキームの層（イメージ)
- M 加群から準連接層の構成
- 準連接層の定義と性質
- アフィンスキーム上の準連接層と加群の誘導する層の関係
- 連接層の定義と性質
- アフィンスキームの場合の準連接層のコホモロジー
- 射影スキームの構成
- 射影スキームによる twist
- 射影スキーム上の準連接層, 連接層の特徴づけ
- 射影スキーム上の連接層のコホモロジーの計算

5.0.1 モチベーション

このセミナーではしばらく周期の話をする。

- X: $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の代数多様体
- $Z \subset X$: closed subvariety
- $\gamma \in H_n(X^{an}, Z^{an}, \mathbb{Z})$:相対特異ホモロジー類
- $\omega \in H^n_{dR}(X, \mathbb{Z})$ を de Rham コホモロジー類

この時 $[X, Z, n, \gamma, \omega]$ を抽象的周期という. 前回のセミナーにて代数的なドラムの定理を示した。改めて定理を記述すると X を $\mathbb{C}$ 上の射影代数多様体とした時,

$$H^q(X_a n, \mathbb{C}) = \mathcal{H}^q(X, \Omega_{alg})$$

となる.

前回はこれを二重複体の理論を使って証明した. ただし, 解析と代数との直接の関係は Serre の

GAGA を用いて使った. そこで今回次回の二回は Serre の GAGA を目標とする. GAGA は射影代数多様の連接層とその複素化が作る連接層に対応があることを示すが。連接層の一般論自体はそれ以前の論文で行われている。また GAGA 自体がスキーム論以前なので、スキーム論的にまとめ直したい.

ということで今回は準連接層や連接層を構成し, 特に射影スキーム上の連接層のコホモロジーを計算したい。

5.0.2　Preliiminary

5.0.3　global section で生成される層と準連接層

Definition 5.0.1.

大域切断で生成される層準連接層の定義 A 加群 M が作る層準連接層の操作に対する性質アフィンスキーム上の準連接層の性質連接層の定義と性質ネーター環上のアフィンスキームの場合の連接層と加群の関係 Principal Open set を使ったチェックコホモロジーの計算射影スキームの定義と基本的な性質射影空間の性質射影スキーム上の準連接層と連接層の構成射影スキームの場合の次数つき加群と連接層の関係 (Remark するだけ上野 定理 5.21) 射影空間の連接層のコホモロジーの計算

5.1　Coherent sheaves on scheme

5.1.1　sheaves of modules

Definition 5.1.1. (X, O_X) を *ringed space* とする.X 上のアーベル群の層 $\mathcal{F}$ が O_X-加群であるとは,

- X の任意の *open set* U に対し,$F(U)$ は $O_X(U)$ 加群となる.
- $V \subset U$ に対し, 以下となる.

$$\begin{array}{ccc} O_X(U) \times \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}(U) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ O_X(V) \times \mathcal{F}(V) & \xrightarrow[g]{} & \mathcal{F}(V) \end{array}$$

この時,$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ のテンソル積,$\mathcal{F} \otimes_{O_X} \mathcal{G}$ を

$$U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{O_X(U)} \mathcal{G}(U)$$

の層化したものを $\mathcal{F} \otimes_{O_X} \mathcal{G}$ で表す. また $(\mathcal{F} \otimes_{O_X} \mathcal{G})_x = \mathcal{F}_x \otimes_{O_{X,x}} \mathcal{G}_x$ となる. これは 5.1.5 で示す.

Definition 5.1.2. (X, O_X) 加群 $\mathcal{F}$ に対し,$\mathcal{F}$ が $x \in X$ で *global section* で生成されるとは,

$$O_{X,x} \otimes \mathcal{F}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{F}_x$$

となること. $\forall x \in X$ で *global section* で生成される時,$\mathcal{F}$ は *global section* で生成されるという. $S \subset \mathcal{F}(X)$ に対し,$\{s_x \mid s \in S\}$ が $\mathcal{F}_x$ を生成する時 S で生成されるという.

Lemma 5.1.3. *$\mathcal{F}$ が global section で生成されていることと $O_X^{(I)} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$ と同値.*

Proof. $O_X^{(I)} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$ ならば $\mathcal{F}$ が global section で生成されていることを示す.

$$\begin{array}{ccc} O_{X,x} \otimes O_X^{(I)}(X) & \xrightarrow{f} & O_{X,x} \otimes \mathcal{F}(X) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ O_X^{(I)}(X)_x & \xrightarrow[g]{} & \mathcal{F}_x \end{array}$$

が成り立ち,i は $O_X^{(I)}$ は O_X 加群として global section で生成されているので全射. また,g は仮定から全射となる. よって p は全射となるので,global section で生成されている.

逆を示す.S として $\mathcal{F}(X)$ を取ることにより, 必ず $\mathcal{F}$ を生成する S が存在する. また,$e_s \in O_X^S(U)$ を $e_s(s) = 1, e_s(t) = 0$ となる元とし, $O_X^S(U) \to \mathcal{F}(U), \sum_{s\in S} a_s e_s \mapsto a_s s_U$ とすれば, これは層の間の射となり, 全射性も言える. □

Definition 5.1.4. (X, O_X) 加群の層 $\mathcal{F}$ が ***quasi coherent shaef*** とは $\forall x \in X$ に対し,$x \in U$ が存在し,

$$O_X^{(J)}|_U \to O_X^{(I)}|_U \to \mathcal{F}|_U$$

が *exact* となることを言う.

5.1.2 Quasi-Coherent Sheaves on an affine scheme

$X = \mathrm{Spec}A$ の時に quasi-coherent sheaf を構成する. M を A-mod する. $\tilde{M}$ という O_x-加群を構成する.

$$\tilde{M}(D(f)) := M_f = M \otimes_A A_f$$

とする. $D(g) \subset D(f)$ の時,$V(g) \supset V(f)$ なので, $\cup_{f\in p} p = \sqrt{(f)} \ni g$ となる. よって $g^n = fb$ とかける. これより

$$\begin{aligned} A_f &\to \quad A_g \\ \frac{a}{f^m} &\mapsto \frac{b^m a}{g^{mn}} \end{aligned}$$

が定まり, それの誘導する射

$$\begin{aligned} M_f &\to \quad M_g \\ \frac{x}{f^m} &\mapsto \frac{b^m x}{g^{mn}} \end{aligned}$$

が定義される. この時 $\{D(f)\}$ 上で $\tilde{M}$ が $\mathcal{B}$-sheaf になることを示す.

$$\begin{aligned} &X = \cup D(f_i) \\ \Leftrightarrow &X = D\left(\sum (f_i)\right) \\ \Leftrightarrow &V\left(\sum (f_i)\right) = \emptyset \end{aligned}$$

この時,$\sum f_i = (1)$ より,$\sum a_i f_i = 1$ とかける. よって a_i が 0 でない f_i を使い,$X = \cup_{i=1}^{n} D(f_i)$ とかける.

X の finite open covering について,X について層の定義を満たすことを示せば十分である. X についての条件を満たせれば,$X = D(f)$ の時について示せる, それは $D(f) \cup D(f_i)$ が Affine になるので,$D(f)$ というスキームの finte open covering について示せる. また,finite open cover の時に言えれば,compact なので open cover に対し,affin finte open cover が取れ、そこ上で成り立つことを示せばよい。特に

5.1.3 Coherent sheaves

Lemma 5.1.5. *X 上の O_X 加群 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ のテンソル積,$\mathcal{F} \otimes_{O_X} \mathcal{G}$ を $\mathcal{F} \otimes_{O_X} \mathcal{G}(U) := \mathcal{F}(U) \otimes_{O_X(U)} \mathcal{G}(U)$ とすると層になるまた $(\mathcal{F} \otimes_{O_X} \mathcal{G})_x = \mathcal{F}_x \otimes_{O_{X,x}} \mathcal{G}_x$ となる.*

環つき空間をスキームの場合に限定して示す. 局所的なので、X をアフィンスキームと思って良い.

Lemma 5.1.6. *$S^{-1}N \otimes M \sim S^{-1}(N \otimes M)$*

真面目に元をおえば示せる.

Lemma 5.1.7. *$S^{-1}(N \otimes M) \sim S^{-1}N \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}M$*

これは $S^{-1}N = N \otimes S^{-1}R$ より

$$S^{-1}N \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}M \sim N \otimes S^{-1}R \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}M \sim N \otimes S^{-1}M \sim S^{-1}(N \otimes M)$$

となる.

これを使うことにより, スキームに対しては成り立つことがわかる. おそらく, 一般の場合は上と近い形で $O(V) \otimes_{O(U)} M(U) \otimes N(V) \to M(V) \otimes N(V)$ と $N(U) \otimes M(U) \to O(V) \otimes N(U) \otimes M(V)$ とを使いながら, これのら indcutive limit が一致することを示せばよいはず。

5.2 Projective Scheme

Projcetive Scheme の定義をする. GAGA の対象となる射影代数多様体は $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ の closed subscheme である.

Definition 5.2.1. B が次数つき A 代数であるとは $B = \oplus B_n$ とかけ,$B_n B_m \subset B_{n+m}$ となること

Lemma 5.2.2. *$f \in B_+$ を degree r の homogeneous な元とする.*

1. *canonical な射は $\theta : D_+(f) \to \mathrm{Spec} B_{(f)}$ 同相となる*
2. *$D_+(g) \subset D_+(f)$ の時,$\alpha = g^r f^{-\deg g}$ とする. この時 $\theta(D_+(g)) = D(\alpha)$*
3. *自然な射 $B_{(f)} \to B_{(g)}$ は $(B_{(f)})_\alpha = B_{(g)}$ を induce する.*
4. *その他いろいろ*

1 を示す. 方針は以下の通り.

- Proj$B$ が Spec$B$ の部分位相であることを示す.
- 環の間の射を用いて自然な射を誘導し, 連続であることを示す
- 射が全射であることを示す

- 射が単射であることを示す.
- 開写像であることを示す.

Definition 5.2.3. $X_i := \mathrm{Spec}A[T_iT_j^{-1}]$ とすると $X_{ij} = X_{ji}$ となるので, これを張り合わせたものを A の *Projective Space* といい $\mathbb{P}^{\propto}{}_A$ で表す. *Projective Space* の *closed subscheme* を *Projective Scheme* という.

第 6 章

GAGA

GAGA では射影代数多様上の層とその analytic なものが定めるコホモロジーの一致や圏同値を示す. ここでは, 最初に analytic space とその上の層を定義する. その後代数多様体に対し, 代数多様体の analytic 化を定義し, 射影代数多様体の場合の関係について示す.

6.1 preliminary

GAGA では既知とされることを一定まとめておく. ここでは層と環の flat について説明する.

6.1.1 sheaf

GAGA では層を普段とは異なる方法で定義しているため、その点に言及しておく. GAGA や FAC では層を以下で定義している.

Definition 6.1.1. 以下の組を層という.

- 位相空間 X
- $x \in X$ に対し, アーベル群 $\mathcal{F}_x$ が対応する.
- $\mathcal{F}$ を集合としては $\mathcal{F}_x$ の *disjoin union* となる位相空間

$\pi : \mathcal{F} \to X$ を $f \in \mathcal{F}_x$ の時 $\pi(f) = x$ とする. さらに

- 任意の $f \in \mathcal{F}$ に対し,$f \in \mathcal{F}$ の近傍 V と $\pi(f) = x$ の近傍 W で V, W が同相となるものが存在する.
- f, g に対し, $-f, f + g$ が *continuos*(加法は $\pi(f) = \pi(g)$) の時のみ.

この時,$\Gamma(\mathcal{F}, U) := \{s \in \mathrm{Hom}_{conti}(U, \mathcal{F}) \mid \pi \circ s = id_u, \}$ とすると, これはアーベル群となる. また, 通常よくある層の公理を満たす.section なので明らかにわかる. 非自明なのは連続性だけだが、貼り合わせを考えることでわかる.

逆にこちらの層を定義とする.

Propostion 6.1.2. 層の定義は互いに同値である.

最初に $X, \mathcal{F}_x, \mathcal{F}, \pi$ を定める. X は元の位相空間のままとし,$\mathcal{F}_x := \varinjlim \mathcal{F}(U)$ とする.$\mathcal{F}$ は $\mathcal{F}_x$ の disjoint union で定める. $\mathcal{F}$ の位相を定める. $t \in \mathcal{F}(U)$ と $x \in U$ に対し,$\phi_x^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$ とする. $[t, U]$ を $\{\phi_x^U(t)\}$ のなす集合とする. $\mathcal{F}$ の $[t, U]$ の生成する位相とする. 実際にこの位相が局所同相性や演算の連続性を満たすことを示す. 実際 $\phi_x^U(t)$ の近傍として $[t, U]$ がとれ, これは U と同相になる. また,$f \mapsto -f$ は $[t, U]$ の逆像が,$[-t, U]$ を対応させるのでので continous であり, $(f, g) \mapsto f + g$ での $[t, U]$ の逆像は $\cup_{x\in U, f_x \in \mathcal{F}_x}(f_x + \phi_x^U(t), -f_x)$ となり, さらに以下となる.

$$\cup_{x\in U, f_x\in\mathcal{F}_x}(f_x + \phi_x^U(t), -f_x) = \cup_{x\in U, f_x\in\mathcal{F}_x}[g_x + \phi_x^U(t), V_{f_x} \cup U] \times [-g_x, V_{f_x} \cup U]$$

ただし $g_x \in \mathcal{F}(V_{f_x} \cup U)$ で $\phi_x^{V_{f_x}\cup U}(g_x) = f_x$ である. x の表記がかぶっているのは微妙. これは Open なので連続である.

6.1.2　direct image と inverse image

層には direct image と inverse image と呼ばれる操作がある。

Definition 6.1.3. $f : X \to Y$ と X 上の層 $\mathcal{F}$ と Y 上の層 $\mathcal{G}$ が存在する時に,***direct image*** $f^*\mathcal{F}$ を Y の開集合 U に対し,

$$f^*\mathcal{F}(U) = F(f^{-1}(U))$$

で定める. また,***inverse image*** $f^{-1}\mathcal{G}$ を X の開集合 V に対し,

$$f^{-1}\mathcal{G}(V) = \varinjlim_{f(V)\subset U} \mathcal{G}(U)$$

で定める. 特に,$f^{-1}\mathcal{G}_x = \mathcal{G}_{f(x)}$ となる.

direct image を使い層を extension する.

Definition 6.1.4. V を X の閉集合とする.$i : V \to X$ に対し, V 上の *sheaf*$\mathcal{F}$ に対し,*direct image* $i^*\mathcal{F}$ を層の ***extension*** という.
この時

$$i^*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(U \cap V)$$

となり,*stalk* は

$$i^*\mathcal{F}_x = \begin{cases} \mathcal{F}_x & x \in Y \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

となる.

Remark. V が閉集合出ない場合は,$\mathcal{F}_x = 0$ と限らない.

6.1.3　Flat couple

flat と completion について議論する.

Definition 6.1.5. *R-加群 M が **flat** とは*

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_2 \to 0$$

が exact の時

$$0 \to M_1 \otimes M \to M_2 \otimes M \to M_2 \otimes M \to 0$$

が exact となること. テンソル積は右完全なので $M_1 \otimes M \to M_2 \otimes M$ が単射であることと同値.

flat は Tor を使った言い換えがある. 最初に Tor を定義する.

Definition 6.1.6. *N の Projective Resolution を取る. つまり射影加群 P_n とすると,*

$$P_{n+1} \to P_n \to \ldots \to P_1 \to N \to 0$$

が exact の時,

$$P_{n+1} \otimes M \to P_n \otimes M \to \ldots \to P_1 \otimes M \to N \otimes M \to 0$$

とする. この時

$$\mathrm{Tor}_i(N, M) = \mathrm{Ker}(P_n \otimes M \to P_{n-1} \otimes M)/\mathrm{Im}(P_{n+1} \otimes M \to P_n \otimes M)$$

Lemma 6.1.7. • *任意の加群 N に対し Projective Resolution が存在する.*
• *$\mathrm{Tor}(N, M)$ は Projective Resolution のとり方によらない.*

Proof. 自由加群は射影加群であり, 自由加群による resolution の存在は Kernel の各元を基底とする自由加群を作ることで構成できる. Reolution のとり方によらないことは TBD. □

この時以下が成り立つ

Propostion 6.1.8. *1. M が flat*
2. $\forall N, \mathrm{Tor}_n(M, N) = 0$
3. $\forall N, \mathrm{Tor}_1(M, N) = 0$
4. $\forall I$, $\mathrm{Tor}_1(M, R/I) = 0$
5. $\forall I$(finitely generated), $\mathrm{Tor}_1(M, R/I) = 0$

Proof.
■1 ならば 2 M が flat なので上の Tor が exact のままとなり,$\mathrm{Tor}_n(M, N) = 0$ となる. 2 ならば 5 までは自明なので,5 ならば 1 を示す.

■5 ならば 1 $N' \subset N$ に対し,$N' \otimes M \to N \otimes M$ が単射を示すのは $N = N' + \sum_{i=1}^n A\omega_i$ の時に示せばよい. なぜなら $N = \varinjlim(N + \sum A\omega_i)$ となるので, 実際 N から有限個の元をとってそららの帰納極限 (包含) となる. $\varinjlim(N_\lambda \otimes M) \sim (\varinjlim N_\lambda \otimes M)$ となり,inductive limit は完全性を保つので, $0 \to N' \otimes M \to (N' + \sum A\omega_i) \otimes M \to N_i''$ が exact であれば,

$$0 \to N' \otimes M \to (N =) \varinjlim(N' + \sum A\omega_i) \otimes M \to \varinjlim N_i''$$

が exact よりわかる．また N は $N' + A\omega_i$ となる時に示せばそこから inductive に示せる．この時 $I := \{x \in R \mid x\omega_1 \in N'\}$ で定義すると $0 \to N' \to N \to R/I \to 0$ は exact となる. $N \to R/I, n + a\omega_1 \mapsto a$ で定めている. この時 $\mathrm{Tor}_1(M, R/I) = 0$ さえいれれば Tor の完全列から単射性が言える. これも有限生成から一般に拡張するときは先程同様に帰納的極限を取れば良い. □

ここから flat couple について定義する.

Definition 6.1.9. *$A \subset B$ の時,(A, B) が **flat couple** とは B/A が A-mod として flat であること*

Propostion 6.1.10. *(A, B) が flat couple であるとは以下と同値*

1. *B が flat*
2. *$\forall E$ に対し,$E \to E \otimes B \to 0$ 2 つ目の条件は上の Tor の条件と同様に有限生成なイデアルに対し $A/\dashv \to A/\dashv \to B$ が単射と同値になる.*

Proof.

$$\mathrm{Tor}_1(A, E) \to \mathrm{Tor}_1(B, E) \to \mathrm{Tor}_1(B/A, E) \to A \otimes E \to B \otimes E$$

が exact で A は A-mod として flat なので $\mathrm{Tor}_1(A, E) = 0$ となる. よって flag couple つまり $\mathrm{Tor}_1(B/A, E) = 0$ は $\mathrm{Tor}_1(B, E) = 0$ と $E \to B \otimes E$ が単射と同値になる. これから言える. □

Propostion 6.1.11. *環 $A \subset B \subset C$ に対し,(A, C) と (B, C) が flat couple なら $(A, B) = 0$ となる.*

6.1.4 Algebraic Variety

GAGA で出てくる代数多様体について解説する.

X を位相空間とする.

$$\text{閉集合による降下列は停留する.} \tag{A}$$

これは閉集合のなす集合が極小元を持つことを指す.

Propostion 6.1.12. • *X が条件 A を満たす時,X は compact*
- *X が条件 A を満たす時,subspace も条件 A を満たす.*
- *X が条件 A を満たす Y_i の finite union でかける時,X は条件 A を満たす.*

Proof. X の閉集合のなす集合で $\cap F_i = \emptyset$ となったとする.I を適当な順序数と同一視し, $F_0, F_0 \cap F_i, \ldots \cap_{i=1}^n F_i$ とすると, これは停留するので, 有限個の集合で空となる. よって compact 次に, 停留しないとすると A を含む閉集合で停留しないものが取れるので、矛盾. finite union なので、それぞれについてのなす閉集合を union しても閉となり, 言える. □

X が irreducible とは $X = F_1 \cup F_2$ の時,$X = F_1$ か $X = F_2$ となること.

6.1.5 Locally closed subsets of an affine space

$x_0 \in K^n$ に対し,$O_x = \{P(x)/Q(x) \mid Q(x_0) \neq 0\}$ とする. $\mathscr{I}_x(V)$ を $x \in V$ の時は V 上で 0 になる関数,$x \notin V$ の時は $\mathscr{I}_x(V) = \mathscr{O}_x$ とする.

この時,$\mathcal{J}(V)$ は coherent sheaf になる.

6.1.6 Definition of the structure of an algebraic variety

以下を K 上の代数多様体という.

- X は位相空間
- O_x は X 上の K に値を取る関数の germ のなす層 $\mathcal{F}(X)$ の subsheaf

さらに X の finite open covering で,V_i は affine space の locally closed subspace U_i と isomorphic となる. それと $X \times X$ の対角成分は閉という仮定をおく.

つまり, sepaterd かつ neother な K 上のスキームを考える.

6.2 Analytic Spaces

最初にローカルな世界で analytic を定義する.

Definition 6.2.1. $U \subset \mathbb{C}^n$ が ***analytic*** とは $\forall x \in U$ に対し, ある x の近傍 $W \subset \mathbb{C}^n$ 上の正則関数 $f_1, \ldots, f_k$ が存在し,

$$U \cap W = \{x \in W \mid f_1(x) = \ldots f_k(x) = 0\}$$

となること.

これは複素多様体とは限らないが, $U \cap W$ 上で $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ の rank が U のとり方によらない時,$\mathbb{C}^n$ の閉部分多様体そのものであり, 特に複素多様体になる.

Lemma 6.2.2. *$U \cap W$ 上で $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ の rank が U のとり方によらない時,U は複素多様体である.*

Proof. 多様体の局所座標系を $U_i, \phi_i = (z_1, \ldots, z_n)$ とする. この時,rank が k なので z, f ともに順序を適切に入れ替えて $\frac{\partial f_j}{z_i}_{i,j \leq k}$ の rank が k となるようにする. $F : U \to \mathbb{C}^n$ を $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x), z_{k+1}, \ldots, z_n)$ とすると, これは $\phi_i^{-1}(U) \to \mathbb{C}^n$ に拡張され $\phi(x)$ 上で逆関数定理からその近傍で微分同相であることがわかる. よって,(f, z) による局所座標をいれられる. また, $U \cap W$ は $(z_{k+1}, \ldots, z_n)$ と微分同相であることがわかるので, 複素多様体になる. □

U の位相を調べると.U は locally closed となり, また locally compact となる.($\mathbb{C}^n$ の開集合も閉集合は locally compact なのでその共通部分も同様)

Definition 6.2.3. 位相空間 X の部分集合 A が *locally closed* とは, 以下の同値な条件を満たすことである.

1. ある *open set* U と *closed set* V が存在し,$A = U \cap V$ となること.
2. $x \in A$ に対し, ある x の近傍 W が存在し,$A \cap W$ が W 上 *closed* であること

Lemma 6.2.4. 上が同値である.

Proof. 1. $\Rightarrow$ 2. は W として U を取れば良い. この時 $A \cap U = V \cap U$ となるので,U 上 closed.
2. $\Rightarrow$ 1. を示す. これは A の閉包上 A が開集合であることを示せばよい. そうすれば, $A = \overline{A} \cap U$ となる.W が開集合の時だけ示せばよい. この時,$A \cap W = \overline{A} \cap W$ となる. それは $\overline{A} \subset \overline{A \cap V} \cup \overline{A \cap (X \setminus V)}$ であり,$\overline{A} \cap V \subset \overline{A \cap V} \cap V$ となる. さらに $\overline{A} \cap V \subset \overline{A \cap V} \cup V = A \cap V$ より $\overline{A} \cap V = A \cap V$ となる. これより $A \cap V$ は $\overline{A}$ 上開集合となる. $A = \cup_{x \in A} A \cap V$ より A は $\overline{A}$ 上開集合となる. □

ここからは U 上の層を定義する. X 上 $\mathbb{C}$ への連続関数が作る層を $C(X)$ とする. $C(\mathbb{C}^n)$ を $\mathbb{C}$ に値を取る連続関数のなす層とし,$\mathcal{H}$ を C^n 上の正則関数のなす層とする.

$U \subset \mathbb{C}^n$ 上の正則関数のなす層を $\mathbb{C}^n$ の連続関数のなす層から U 上の連続関数のなす層への写像を使い定義する.

$\forall x \in U$ に対し,$\epsilon_x : C(\mathbb{C}^n)_x \to C(U)_x$ が定義される. この写像での $\mathcal{H}_x$ の像を $\mathcal{H}_{x,U}$ とする. $\epsilon_x : \mathcal{H}_x \to \mathcal{H}_{x,U}$ の kernel を $\mathcal{A}_x(U)$ と表す. これは U 上ゼロになった正則関数全体となる. 今後しばしば $\mathcal{H}_{x,U} = \mathcal{H}_x / \mathcal{A}_x(U)$ で定める. $\mathcal{A}(U), \mathcal{H}_U$ は U 上の層となる.

この定義では U が多様体でなくても定義できる. この (U, H_U) を **analytic space** という. また analytic space の間の射を以下で定義する.

Definition 6.2.5. U, V を *analytic space* とする.$\phi : U \to V$ が ***holomoprhic*** とは以下を満たすことである.

- ϕ は連続
- $\mathcal{H}_{\phi(x),V} \to \mathcal{H}_{x,U}, f \mapsto f \circ \phi$ が *well-defined* であること. つまり $f \circ \phi \in \mathcal{H}_{x,U}$ となること.

analytic subset や holomorphic は直積で保たれる. つまり U, V が analytic なら $U \times V$ は analytic で ϕ, ϕ' が holomorphic$\phi \times \phi' : U \times U' \to V \times V'$ は holomorphic.

6.2.1　The notion of an analytic space

先程は Affine な場合の analytic space を定義したのでここからは一般の位相空間の場合の analytic space を定義する.

Definition 6.2.6. 位相空間 X と $C(X)$ の部分層 $\mathcal{H}_X$ が ***analytic space*** であるとは, 以下を満たすことである.

- X の開被覆 $\{V_i\}$ が存在し,V_i はある *affine analytic space*U_i と同相であり, また, ここから $\mathcal{H}_X|_{V_i}$ と $\mathcal{H}_{U_i}$ が層として同型である.
- X はハウスドルフ

X の開部分集合:V が chart とはあるアフィン analytic space$U$ と analtyic isomorphism が存在すること.

6.2.2 Analytinc Sheaves

Analytic Space の構造層 $\mathcal{H}_X$ は環の層なので,H_X 加群を Analtyic shaef という.

Y を X の closed analytic subspace とする. この時,$\mathcal{A}_x(Y) \subset \mathcal{H}_{x,X}$ を f の Y での制限が zero となるものとする. 特に $x \notin Y$ の時は $\mathcal{A}_x(Y) = \mathcal{H}_x(Y)$ とする. この時 $\mathcal{A}_x(Y)$ の元は f は $\mathcal{H}_x(Y)$ の元をかけても $x \in Y$ の近傍で 0 のままなので,$\mathcal{A}_x(Y)$ の元となる. 特に $\mathcal{A}(Y)$ は $\mathcal{H}_X$ 加群となる.

Propostion 6.2.7. • $\mathcal{H}_X$ は *Coherent sheaf of rings.*

• Y が X の *closed analytic subspace of* X の時,$\mathcal{A}(Y)$ を *coherent analytic sheaf* となる.

`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/analytic_geometry_2019/sheaves_and_analytic_sets.pdf` この辺を見る

6.2.3 A neighborhood of a point in an analytic space.

6.3 The analytic space associated to an algebraci variety

最初に $\mathbb{C}$ 上の algebraic variety と regular map を定義する.

Definition 6.3.1. 有限生成 $\mathbb{C}$ 代数 R に対し,$(\mathrm{Spm}R, R)$ を**アフィン代数多様体**といい、*2* つのアフィン代数多様体 $(\mathrm{Spm}R, R)$ と $(\mathrm{Spm}S, S)$ に対して $\mathbb{C}$ 準同型写像 $\psi : S \to R$ と ψ から定まる写像 $\psi^a : \mathrm{Spm}R \to \mathrm{Spm}S$ が存在する時, (ψ, ψ^a) を *(*正則な*)* 射という.

I を含む極大イデアル全体の集合を $V(I)$ とすると,$V(I)$ 全体を閉集合とする位相が定まり,Zariski 位相という.

Remark. スキームと同様に $f \in R$ に対し,$D_m(f) := R_f$ とする層が定まりこれにより代数多様体も局所環つき空間として考えられる.

6.3.1 Definition of the analytic space associated to an algebraic variety.

これに付随する analytic space が定義できる. 代数多様体は local には Affine 代数多様体であり, その時 Spm$R$ は $\mathbb{C}^n$ の Zariski 閉集合に対応する. よってこれらには analytic space の構造が定まり, 実は全体ではりあわせることができる.

アフィン代数多様体の場合に $\phi : V \subset \mathbb{C}^n \to W \subset \mathbb{C}^m$ が **regular** とは $\phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m)$ で各 Φ_i が多項式でかけること.

Propostion 6.3.2. *There exists on X a unique structure of an analytic space such that, for every chart $\phi : V \to U$, the Z-open set V is open, and ϕ is an analytic isomorphism of V (equipped with the analytic structure induced by that of X) onto U (equipped with the analytic structure defined in $n^o 1$).*

6.3.2 Relations between the local ring at a point and the ring of holomorphic functions at that point

X を algebraic variety とする.$x \in X$ に対し,$\mathcal{O}_x$,$\mathcal{H}_x$ が定まる. 上の補題から regular functiona は holomorphic function なので,$\theta : \mathcal{O}_x \to \mathcal{H}_x$ が定まり, x 上で 0 になるものは 0 になるままなので,$\theta(m_x) \subset m_{\mathcal{H}_x}$ となり,$\hat{\theta} : \hat{\mathcal{O}}_x \to \hat{\mathcal{H}}_x$ が定まる.

以下 2 つの命題は同時に示す. 証明が全く読めない...

Propostion 6.3.3. $\hat{\theta} : \hat{\mathcal{O}}_x \to \hat{\mathcal{H}}_x$ は *bijective*

Propostion 6.3.4. $\mathcal{A}_x(Y)$ *is generated by* $\theta(\mathcal{J}_x(Y))$

Proof. まず $X = \mathbb{C}^n$ の時に示す. この時は $\hat{\mathcal{O}}_x = \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]] = \hat{\mathcal{H}}_x$ となるので, 成り立つ. □

6.3.3 Relations between the usual topology and the Zariski topology of an algebraic variety.

6.3.4 An analytic criterion for regularity

Propostion 6.3.5. T, X が代数多様体で $p : T \to X$ が *regular bijective* であり,p が *analytic isom* なら *biregular isom* である.

6.4 Thre correspondence between algebraic sheaves and coherent analytic sheaves

6.4.1 The analytic sheaf associated to an albgeraic sheaf

X を $\mathbb{C}$ 上の algberaic variety とする. それに対し,X^h を X に付随する analytic space とする. $\mathcal{F}'$ を $X \to X_h$ に対する inverse image とする.

$\mathcal{F}^h := \mathcal{F}' \otimes \mathcal{H}$ とする.

Propostion 6.4.1.
- *Functor* $\mathcal{F}^h$ は *exact functor*
- *algebraic sheaf* $\mathcal{F}$ に対し,$\alpha : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}^h$ は *injective*
- $\mathcal{F}$ が *coherent algebraic sheaf* なら $\mathcal{F}^h$ も *coherent analytic sheaf* になる.

O_x 加群の層をを algebraic sheaf といい,M を analytic space とした時,O_M 加群の層を analytic sheaf という.

6.5 Projective varieties. Statements of the theorems.

GAGA の main theorem について説明する

X を projective variety, ここでは $\mathbb{P}^r(\mathbb{C})$ の閉部分多様体する.

Theorem 6.5.1. *X 上の coherent algebraic sheaf $\mathcal{F}$ に対し,*

$$\epsilon : H^q(X, \mathcal{F}) \to H^q(X^h, \mathcal{F}^h)$$

は isomorphism

Theorem 6.5.2. *$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ を X 上の coherent algebraic shaef とする. この時,*

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \sim \mathrm{Hom}(\mathcal{F}^h, \mathcal{G}^h)$$

Theorem 6.5.3. *X^h 上の coherent analytic sheaf $\mathcal{M}$ に対し,X 上の algberaic sheaf $\mathcal{F}$ で $\mathcal{F}^h = \mathcal{M}$ となるものが存在する*

これを一つずつ示す.

6.6 Proof of theorem 1

証明の前にいくつか補題を示す.

Lemma 6.6.1. *X 上の層 $\mathcal{F}$ に対し,$X \subset Y$ のとき, Y の opn set U に対し,$\mathcal{F}^e(U)$ を*

$$U \mapsto \begin{cases} \mathcal{F}(U) & (if U \subset X) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

で定める前層の層化とする. この時,

$$\mathcal{F}^e_x = \begin{cases} \mathcal{F}_x & (if x \in X) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

となる.

Proof. 前層のとり方から明らか. □

Lemma 6.6.2. *この時,cohomology は一致する. つまり,$X \subset Y$ の時*

$$H^q(X, \mathcal{F}) = H^q(Y, \mathcal{F}^e)$$

となる.

Proof. check cohomology で考えるとよい. Y の任意の open cover に対し, Fine な十分小さい Open Cover$\mathcal{U} = \{U_i\}$ を取ると $U_i \subset X$ 以外では $\mathcal{F}(U_i) = 0$ としてよい. よって十分細かい open cover に対し, $H(\{U_i \cap X\}, \mathcal{F}) = H(\mathcal{U}, Y)$ となる. これより,inductive limit wをとっても一致する. □

X でのコホモロジーと射影空間のコホモロジーが一致するので, 射影空間で考える.

射影空間の場合にコホモロジーが一致することを示す.

射影空間の時によく使われる代数的な層のコホモロジーの定理を述べる.

Theorem 6.6.3. R をネーター環,$S = \mathbb{P}^n_R$ とする.

1. $S \simeq \oplus_{n\in\mathbb{Z}} H^0(X, O_X(m))$
2. $0 < i < n, n > i$ に対し,$H^i(X, O_X(m)) = 0$
3. $H^n(X, O_X(-n-1)) \simeq R$
4. $H^0(X, O_x(m)) \times H^n(X, O_X(-m-n-1)) \to H^n(X, O_X(-n-1))$ は *perfect pairing*

Proof.

■$S \simeq \oplus_{n\in\mathbb{Z}}$　自明.$H^0(X, O_X(m)) = S_m$ で $m < 0$ の時,$S_m = 0$ からわかる.

■$H^n(X, O_X(-n-1)) \simeq R$　$C^{n-1}(\mathcal{U}, O_X(m)) \to C^n(\mathcal{U}, O_X(m))$ を構成する. $U_j := D_+(x_j)$ とし,$U_{j_0\dots j_k} = \cap_{i=1}^k U_{j_i}$ とする. $\mathcal{U} := \{U_j \mid j = 0, \dots, n\}$ $\Gamma(U_{j_0\dots j_p}, O_x(m)) = \{\frac{f}{(x_0\dots x_n)^\ell} \mid \deg f = \ell(p+1) + m\}$ となる. $\delta : C^{n-1}(\mathcal{U}, O_x(m)) \to C^n(\mathcal{U}, O_x m)$ を構成する. 具体的に書くと以下となる.

$$\oplus_{i=0}^m S(m)_{(x_0\dots\hat{x}_i\dots x_n)} \to S(m)_{(x_0\dots x_n)}$$
$$\sum_{i=0}^n \frac{f_i}{(x_0\dots\hat{x}_i\dots x_n)^{\ell_i}} \mapsto \frac{\sum_{i=0}^n (-1)^i f_i x_i^{\ell_i}(x_0\dots x_n)^{\ell-\ell_i}}{(x_0\dots x_n)^\ell}$$

実際に H^n を求めるために, これらの基底を求める. $S(m)_{x_0\dots x_n}$ は $\frac{x_0^{m_0}\dots x_n^{m_n}}{(x_0\dots x_n)^\ell}(\sum m_i = ln + m)$ が基底となる. 次数を変えると $x_0^{m_0}\dots x_n^{m_n} \sum m_i = m, m_i \in \mathbb{Z}$ で求まる. $S(m)_{(x_0\dots\hat{x}_i\dots x_n)} \subset S(m)_{x_0\dots x_n}$ は i の次数が 0 以上のものとなる. よって次数が $-n-1$ の時次数が全て負となるものが生成する空間は $R\frac{1}{x_0,\dots,x_n}$ となり, $H^n(X, O_X(-n-1)) \sim R$ となる.

■$0 < i < n$ に対し,$H^i(X, O_X(m)) = 0$

$$S(-1) \xrightarrow{x_n} S \to S/(x_n)$$

に $O_x(n)$ と n に対する inducition を使うことにより, $H^i(X, O_x(m)) \sim H^i(X, O_x(m+1)$ がわかる. よって,$H^i(X, O_x) = 0$ さえ示せべ良いことがわかる.

それはよい開被覆 $\mathcal{U}$ を固定して具体的に元を構成して exact となることを示す. 詳細は TBD

□

6.6.1　proof of theorem 6.5.1

実際に定理を示す, 基本的な方針は以下の通り.

1. O の場合の analytic なコホモロジーを計算
2. O の場合の代数的なコホモロジーを計算
3. $O(m)$ の場合にインダクションを使って示す.
4. 連接層の場合にインダクションを使って示す.

■$\mathcal{O}$ の場合の analytic なコホモロジーを計算． $H^q(X^h, \mathcal{O}^h)$ は $q = 0$ の場合は X^h 上正則な関数全体であり,X はコンパクトなので $\mathbb{C}$ になる. $q > 0$ の時,0 になる. ドルボーの定理から $H^{0,q}(X^h, \mathcal{O}^h)$ と一致し,

$$0 \to H \to A^{0,0} \to A^{0,1} \to \cdots, A^{0,n} \to 0$$

が exact となり,$H^{0,q}(X^h, \mathcal{O}^h) = \mathrm{Ker}(A^{0,q} \to A^{0,q+1})/\mathrm{Im}(A^{0,q-1} \to A^{0,q})$ これはドルボーの補題から 0 次以外消える.0 次は正則関数の層の global section となる. ここで射影空間はコンパクトなので、それは定数関数しかないので $\mathbb{C}$ となる.

■$\mathcal{O}$ の場合の代数的なコホモロジーを計算　先程の射影空間のコホモロジーの定理 6.6.3 を用いると, $S = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ に対し, $H^0(X, \mathcal{O}_X) = S_0 = \mathbb{C}$ となる. $i = n$ の時はコホモロジーの計算は $n = -m - 1$ を代入すると, コホモロジーが 0 になることがわかる. それ以外の部分については先程の定理から消えることから証明できた.

■$\mathcal{O}(m)$ の場合の代数的なコホモロジーを計算　これは

$$S(-1) \xrightarrow{x_n} S \to S/(x_n)$$

が誘導する層のコホモロジー

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{x_n} \mathcal{O} \to \mathcal{O}_E \to 0$$

$(E = \mathrm{Proj}(S/x))$ となるので, これの $\mathcal{O}(m)$ をテンソル積した完全列から induction で示す.

indcution としてては n の次元と m の次元両方である. つまり $n-1$ まで全てと n の場合の $m-1$ までが示されている時に一致を示すものである. これは $n = 0$ の場合は定数関数しかないためあきらか一致することから n での induction の仮定も満たしている. 文字を省略するため X を略する

$$\begin{tikzcd}
H^{q-1}(\mathcal{O}_E(n)) \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & H^q(\mathcal{O}(n-1)) \arrow[r] \arrow[d, "2"'] & H^q(\mathcal{O}(n)) \arrow[r] \arrow[d, "3"'] & H^q(\mathcal{O}_E(n) \arrow[r] \arrow[d, "4"'] & H^{q+1}(\mathcal{O}(n-1)) \arrow[d, "5"'] \\
H^{q-1}(\mathcal{O}_E(n)^h \arrow[r] & H^q(\mathcal{O}(n-1)^h) \arrow[r] & H^q(\mathcal{O}(n)^h) \arrow[r] & H^q(\mathcal{O}_E(n)^h) \arrow[r] & H^{q+1}(\mathcal{O}(n-1)^h)
\end{tikzcd}$$

多項式の次元に関する induction から 1,4 が同型,$n-1$ に関する induction により 2, 5 が同型なので five term lemma より同型.

■coherent sheaf の場合の代数的なコホモロジーを計算　$0 \to R \to L \to F \to 0$ が exact でで L が $\mathcal{O}(n)$ の直和となるものが存在する. これに対して five term lemma を使うことで示される.

$$\begin{tikzcd}
H^q(\mathcal{R}) \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & H^q(\mathcal{L}) \arrow[r] \arrow[d, "2"'] & H^q(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "3"'] & H^{q+1}(\mathcal{R}) \arrow[r] \arrow[d, "4"'] & H^{q+1}(\mathcal{L}) \arrow[d, "5"'] \\
H^q(\mathcal{R}^{\langle}) \arrow[r] & H^q(\mathcal{L}^h) \arrow[r] & H^q(\mathcal{F}^h) \arrow[r] & H^{q+1}(\mathcal{R}^h) \arrow[r] & H^{q+1}(\mathcal{L}^h)
\end{tikzcd}$$

は完全で,q に対する上からの induction により, 2,4,5 が bijective なので、特に 2,4 が surjective で 5 が injective なので,3 は surjective になる. これは一般の連接層に対して成り立つので,1 も全射になる. 1 全射,24 が単射から 3 の単射性がいえ, 同型であることが示せた.

第 7 章

複素多様

複素代数幾何の基礎をまとめる.

7.1　因子と直線バンドル

M を複素多様体とする.M の open covering$\{U_i\}$ と U_i 上の 0 でない有理型関数 ϕ_i を考える. さらに $U_i \cap U_j$ 上で $\phi_i = g_{ij}\phi_j$ となる $U_i \cap U_j$ 上の正則関数 g_{ij} でどの点でも 0 でないとする. この時 $\{(U_i, \phi_i)\}$

一旦 Fermat's Curve の周期を調べる. その前に代数幾何の基本的な道具である微分加群と因子について調べる.